



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

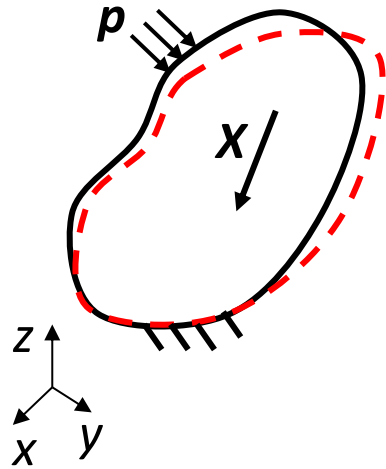


Metoda elementów skończonych (MES1)

Wykład 1. Przybliżone metody numeryczne

02.2024

Metody przybliżone w analizie ośrodków ciągłych



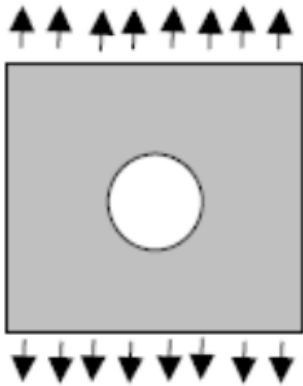
Konstrukcje odkształcalne mogą być badane:

- metodami doświadczalnymi (*koszt i czasochłonność*)
- metodami teoretycznymi:
 - analitycznymi (*tylko proste modele*)
 - numerycznymi (*metody przybliżone*) – MRS, MEB, MES

Metoda różnic skończonych (MRS)

Metoda elementów brzegowych (MEB)

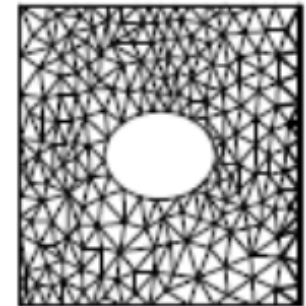
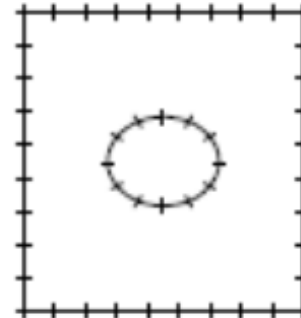
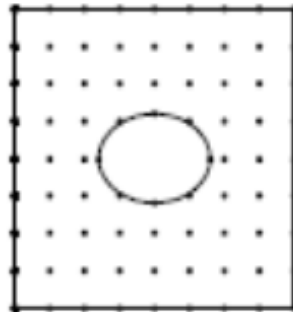
Metoda elementów skończonych (MES)



Równania różniczkowe cząstkowe

Całkowe równania brzegowe

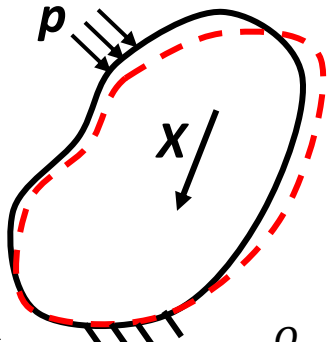
Minimalizacja funkcjonału



W metodach przybliżonych problem poszukiwania nieznanymi funkcji (np. opisujących pole przemieszczeń) zastępowany jest przez problem poszukiwania skończonej liczby parametrów.

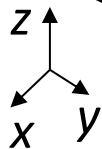
Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej

Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji przedstawiana jest zwykle jako metoda przybliżona, wykorzystująca twierdzenie o minimum całkowitej energii potencjalnej układu odkształcalnego.



Całkowita energia potencjalna układu odkształcalnego:

$$V = U - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} X_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma} p_i u_i d\Gamma$$



Ω – obszar, Γ – brzeg,
 σ_{ij} – tensor naprężenia,
 ε_{ij} – tensor odkształcenia

u_i – wektor przemieszczenia,
 p_i – obciążenie powierzchniowe,
 X_i – siły masowe

Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej mówi, że:

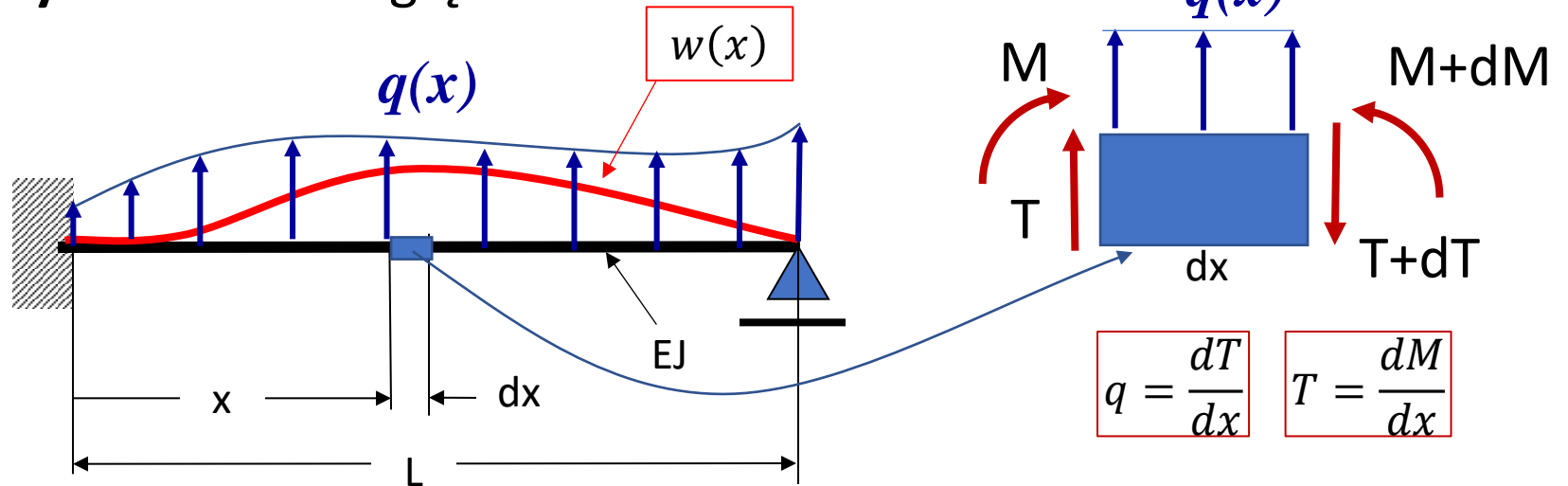
Ze wszystkich geometrycznie dopuszczalnych postaci przemieszczeń, którym może podlegać ustrój sprężysty, wystąpi ta, dla której funkcjonal całkowitej energii potencjalnej osiągnie wartość minimalną.

$$V = U - W = \min !$$

V – funkcjonal (poszukiwanej funkcji $u(\bar{x})$ przypisuje liczbę)

Minimalizacja funkcjonału jest zadaniem rachunku wariacyjnego

Przykład 1: linia ugięcia belki



$$q = \frac{dT}{dx} \quad T = \frac{dM}{dx}$$

Warunki brzegowe: $w(x=0) = 0$ $w(x=L) = 0$ $\frac{dw}{dx}(x=0) = 0$

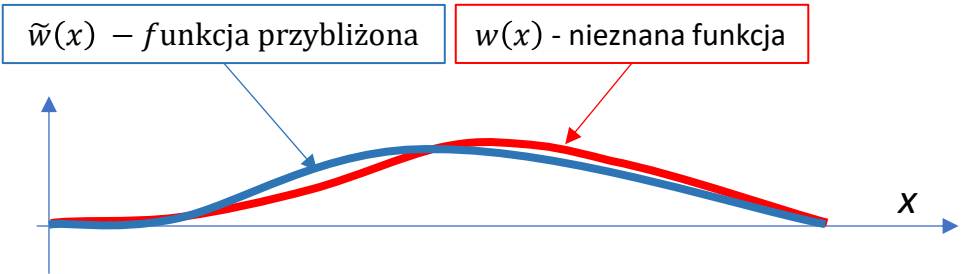
Równanie różniczkowe

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x)$$

lub

Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^L EJ (w'')^2 dx - \int_0^L q(x)w(x) dx = \min$$



Funkcja przybliżona (aproxymująca):

$$\tilde{w}(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x)$$

Aproxymacja: parametryczna lub węzłowa globalna lub lokalna

Metoda Ritz'a

Wprowadźmy funkcję aproksymującą:

$$\tilde{w}(x) = a_1 \cdot g_1(x) + a_2 \cdot g_2(x) + \dots + a_n \cdot g_n(x)$$

(może to być szereg potęgowy lub Fouriera)

Funkcja aproksymująca jest kombinacją liniową nieznanymi parametrów a_i i znanych funkcji geometrycznie dopuszczalnych $g_i(x)$

Po podstawieniu tej funkcji do wyrażenia na całkowitą energię potencjalną otrzymamy funkcję parametrów a_i :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EJ (\tilde{w}''')^2 dx - \int_0^L q(x) \tilde{w}(x) dx$$



$$V = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

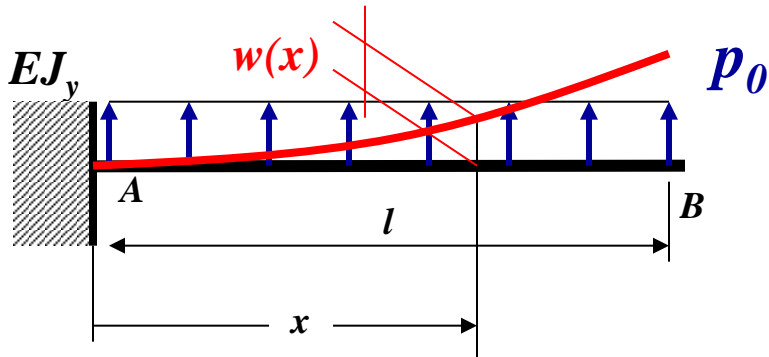
Teraz należy znaleźć minimum funkcji:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0$$

To jest układ n -równań algebraicznych liniowych



Przykład 2: belka wspornikowa



Rozwiąż metodą Ritza belkę wspornikową używając daną funkcję aproksymującą:

$$\tilde{w}(x) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3$$

Warunki brzegowe: $\tilde{w}(x=0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$ $\tilde{w}'(x=0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$

Aby funkcja spełniała warunki geometryczne:

$$\tilde{w}(x) = a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \rightarrow \tilde{w}'(x) = 2a_3 \cdot x + 3a_4 \cdot x^2 \rightarrow \tilde{w}''(x) = 2a_3 + 6a_4 \cdot x$$

Energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [w''(x)]^2 dx - \int_0^l p_0(x) \cdot w(x) dx$$

Po podstawieniu funkcji aproksymującej:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [\tilde{w}''(x)]^2 dx - \int_0^l p_0(x) \cdot \tilde{w}(x) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (2a_3 + 6a_4 x)^2 dx - p_0 \int_0^l (a_3 x^2 + a_4 x^3) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (4a_3^2 + 24a_3 a_4 x + 36a_4^2 x^2) dx - p_0 \int_0^l (a_3 x^2 + a_4 x^3) dx$$

Przykład 2: belka wspornikowa (c.d.)

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (4a_3^2 + 24a_3a_4x + 36a_4^2x^2) dx - p_0 \int_0^l (a_3x^2 + a_4x^3) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} (4a_3^2x + 12a_3a_4x^2 + 12a_4^2x^3) \Big|_0^l - p_0 \left(\frac{1}{3}a_3x^3 + \frac{1}{4}a_4x^4 \right) \Big|_0^l$$

$$V = \frac{EJ}{2} (4a_3^2l + 12a_3a_4l^2 + 12a_4^2l^3) - p_0 \left(\frac{1}{3}a_3l^3 + \frac{1}{4}a_4l^4 \right)$$

Warunek minimum funkcji:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a_3} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial a_4} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\partial V}{\partial a_3} = \frac{EJ}{2} (8la_3 + 12l^2a_4) - \frac{1}{3} p_0 l^3 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_4} = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial a_4} = \frac{EJ}{2} (12l^2a_3 + 24l^3a_4) - \frac{1}{4} p_0 l^4 = 0$$

$$a_3 = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y}$$

$$a_4 = -\frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y}$$

Ostateczna funkcja aproksymująca:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

Przykład 2: belka wspornikowa (c.d.)

Ostateczna funkcja aproksymująca:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

Przybliżenie momentu gnącego:

$$\tilde{M}_g = EJ_y \tilde{w}''(x) \rightarrow$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{2} p_0 l \cdot x$$

Przybliżenie siły tnącej:

$$\tilde{T} = EJ_y \tilde{w}'''(x) \rightarrow$$

$$\tilde{T}(x) = -\frac{1}{2} p_0 l$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$w(x) = \frac{6}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{2}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \frac{p_0}{EJ_y} \cdot x^4$$

$$M_g(x) = \frac{1}{2} p_0 (l - x)^2$$

$$T(x) = -p_0 (l - x)$$

Przykład 2: belka wspornikowa (c.d.)

Rozwiązanie przybliżone:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{2} p_0 l \cdot x$$

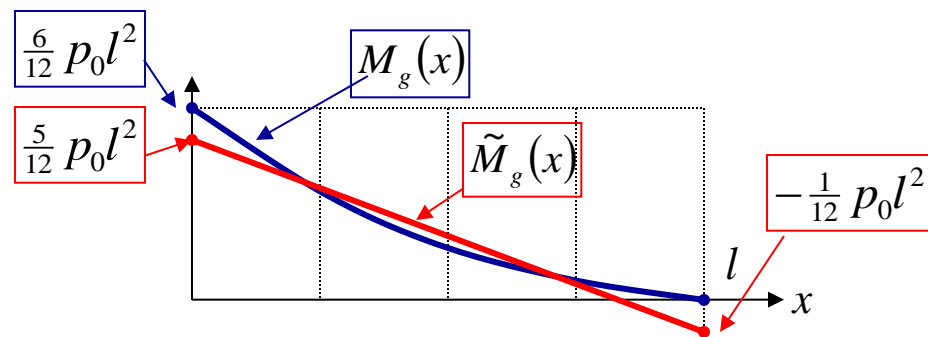
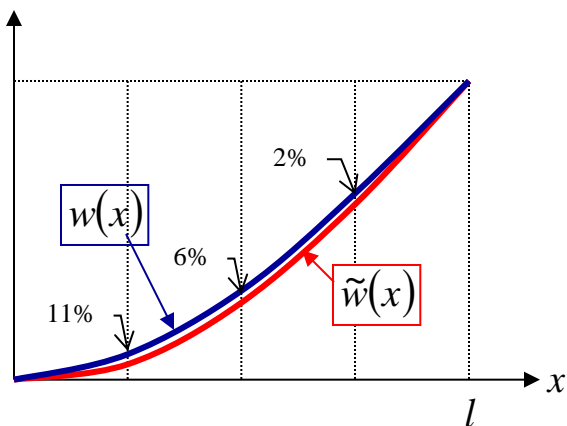
$$\tilde{T}(x) = -\frac{1}{2} p_0 l$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$w(x) = \frac{6}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{2}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \frac{p_0}{EJ_y} \cdot x^4$$

$$M_g(x) = \frac{1}{2} p_0 (l - x)^2$$

$$T(x) = -p_0 (l - x)$$



$$\tilde{w}(l) = 0.125 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}\left(\frac{3}{4}l\right) = 0.082 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right) = 0.042 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

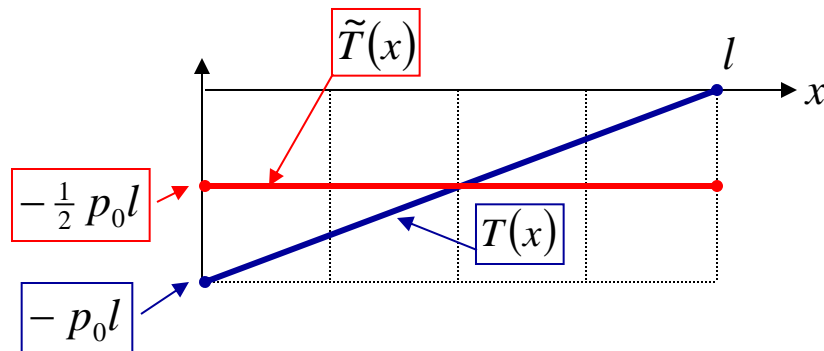
$$\tilde{w}\left(\frac{1}{4}l\right) = 0.012 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w(l) = 0.125 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

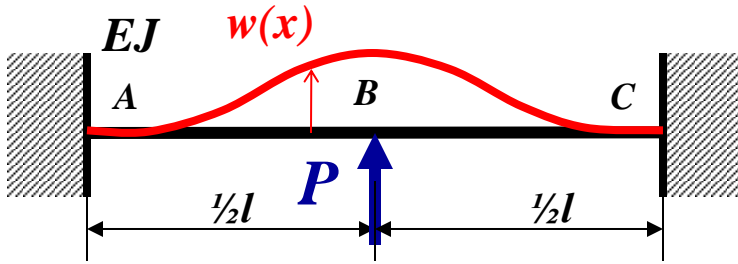
$$w\left(\frac{3}{4}l\right) = 0.084 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w\left(\frac{1}{2}l\right) = 0.044 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w\left(\frac{1}{4}l\right) = 0.013 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$



Przykład 3: belka obustronnie utwierdzona



Rozwiąż metodą Ritza belkę statycznie niewyznaczalną używając daną funkcję aproksymującą:

$$\tilde{w}(x) = A \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$$

$$\tilde{w}'(x) = \frac{2\pi}{l} A \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

$$\tilde{w}''(x) = \frac{4\pi^2}{l^2} A \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

Warunki brzegowe: $\tilde{w}(x=0) = 0$ $\tilde{w}'(x=0) = 0$ $\tilde{w}(x=l) = 0$ $\tilde{w}'(x=l) = 0$

Funkcja spełniała warunki geometryczne!

Całkowita energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [w''(x)]^2 dx - P \cdot w\left(\frac{1}{2}l\right)$$

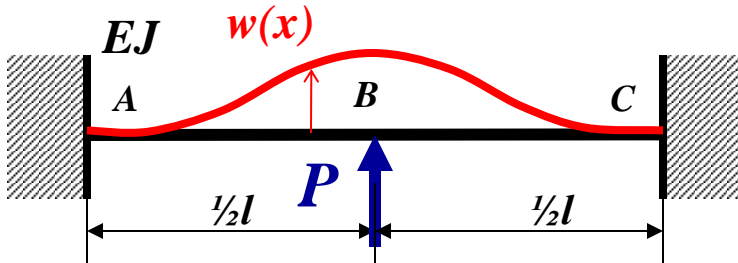
Po podstawieniu funkcji aproksymującej:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [\tilde{w}''(x)]^2 dx - P \cdot \tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{4\pi^2}{l^2} A \cdot \cos \frac{2\pi x}{l} \right)^2 dx - P \cdot A \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2}l}{l}\right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \frac{16\pi^4}{l^4} A^2 \cdot \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx - 2P \cdot A$$

Przykład 3: belka obustronnie utwierdzona (c.d.)



$$\tilde{w}(x) = A \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \frac{16\pi^4}{l^4} A^2 \cdot \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx - 2P \cdot A$$

Całkowita energia potencjalna:

$$V = \frac{4\pi^4 EJ}{l^3} A^2 - 2P \cdot A$$

Warunek minimum funkcji:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial A} = \frac{8\pi^4 EJ}{l^3} A - 2P = 0$$

$$A = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ}$$

Funkcja przybliżona opisująca linię ugięcia:

$$\tilde{w}(x) = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

Przybliżenie momentu gnącego:

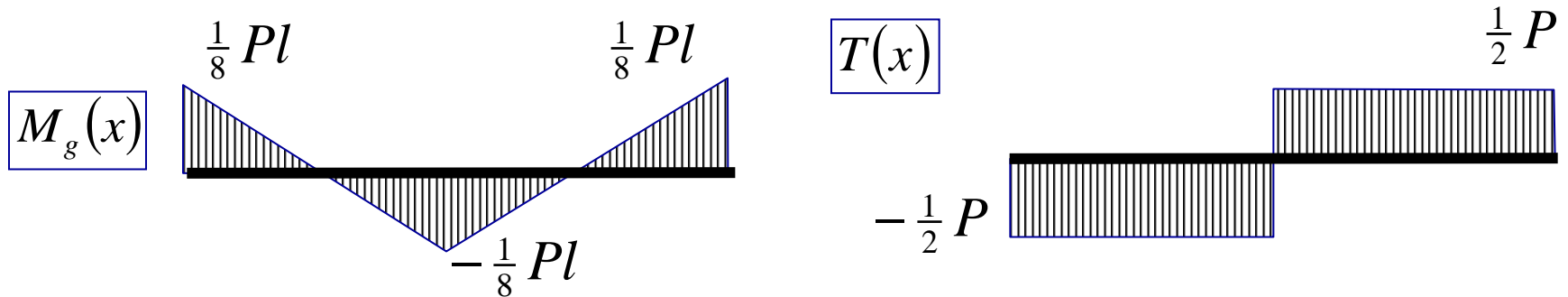
$$\tilde{M}_g(x) = EJ \cdot \tilde{w}''(x) = \frac{Pl}{\pi^2} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

Przybliżenie siły tnącej:

$$\tilde{T}(x) = EJ \cdot \tilde{w}'''(x) = -\frac{P}{\pi} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

Przykład 3: belka obustronnie utwierdzona (c.d.)

Rozwiązanie ścisłe (metodą M-M):

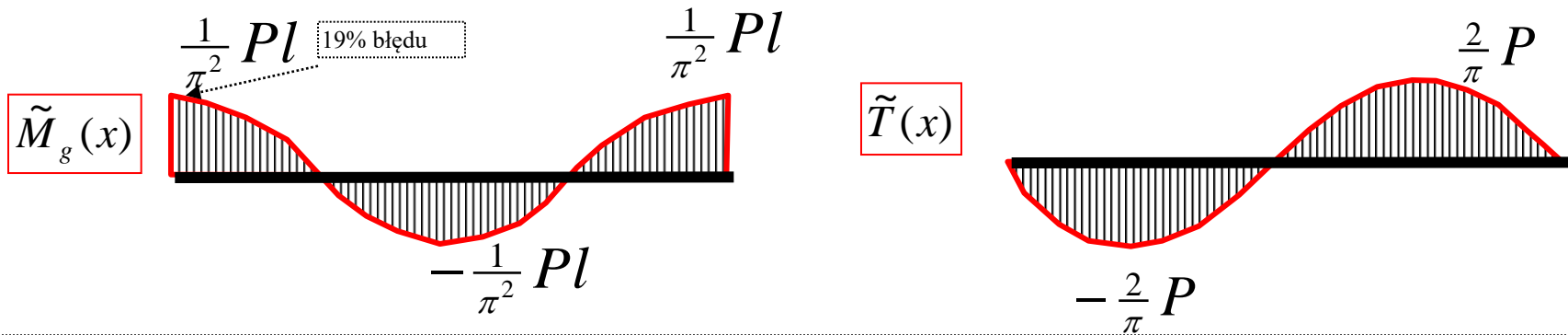


Rozwiązanie przybliżone (metodą Ritz'a):

$$\tilde{w}(x) = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{Pl}{\pi^2} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

$$\tilde{T}(x) = -\frac{P}{\pi} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

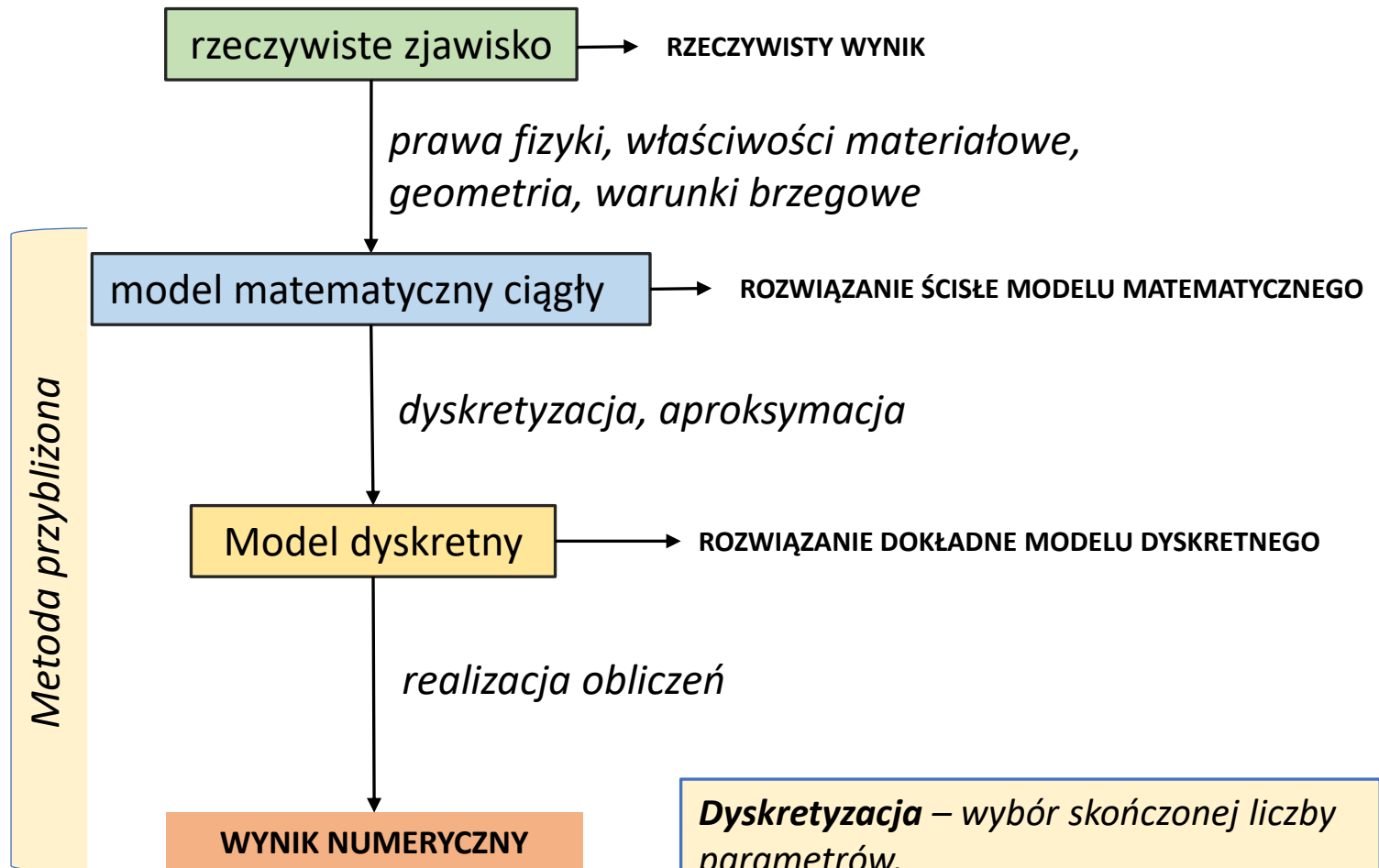


$$\tilde{w}_{extr} = \tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{-Pl^3}{2\pi^4 EJ} = -0.005133 \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$w_{extr} = w\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{-Pl^3}{192 EJ} = -0.005208 \frac{Pl^3}{EJ}$$

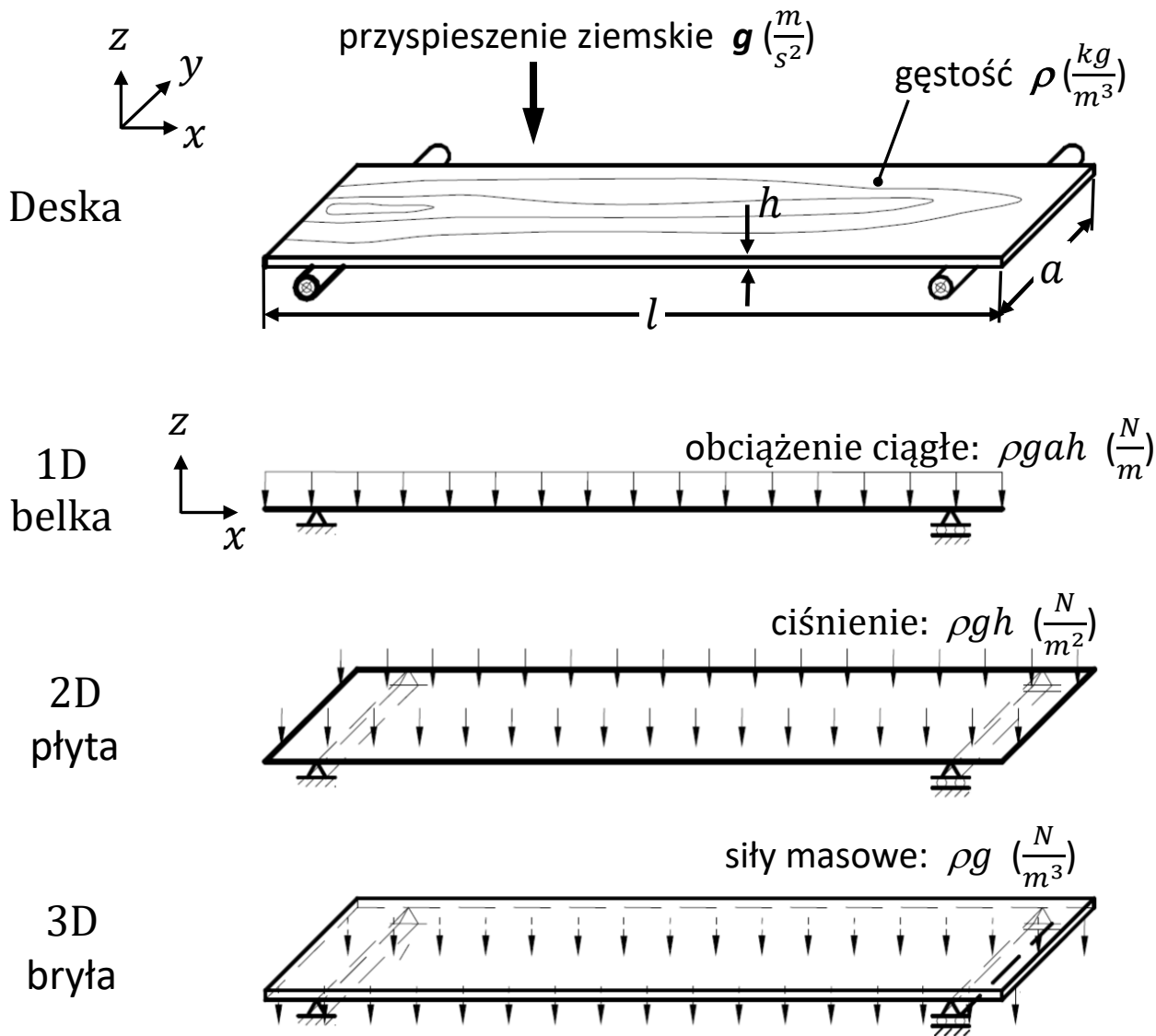
1.5% błędu

Rozwiązanie zagadnienia analizy ośrodków ciągłych metodą przybliżoną



Dyskretyzacja – wybór skończonej liczby parametrów,
Aproksymacja – sposób opisu za pomocą z góry założonych prostych funkcji zależnych od poszukiwanych parametrów

Wybór modelu matematycznego



Założenia:

Własności materiału:

- *izotropowe,*
- *anizotropowe,*
- *lepkosprężyste,*

Duże ugięcia

Warunki brzegowe (kontakt)

Nie ma jednego
dobrego modelu!

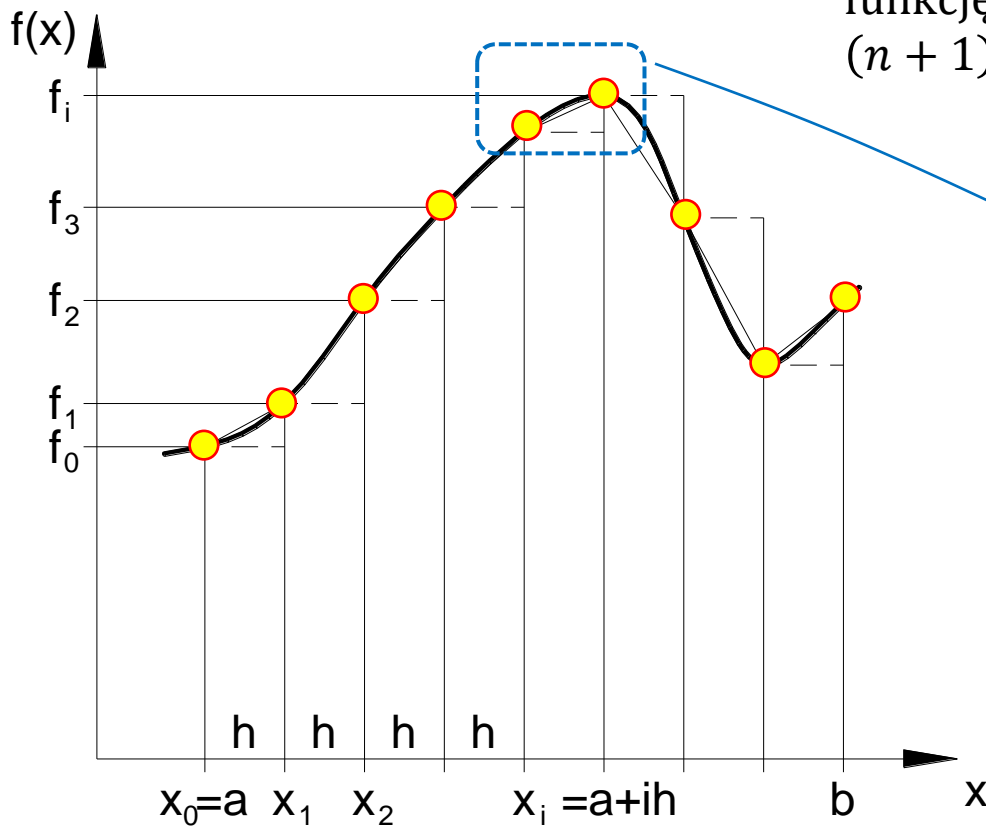
Właściwy model zależy od:

- *celu analizy,*
- *wymagań stawianych konstrukcji,*
- *żądaney dokładności wyników,*
- *dostępności danych materiałowych,*
- *dostępnych narzędzi obliczeniowych*

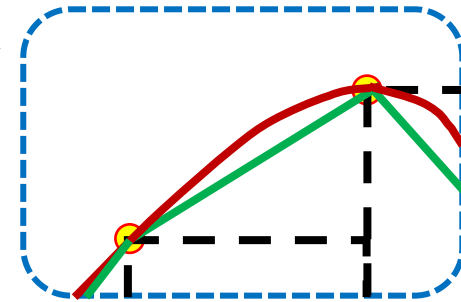
Dyskretyzacja i aproksymacja na przykładzie funkcji jednej zmiennej

dowolna funkcja: $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

dzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na n równych podprzedziałów o długości: $h = (b - a)/n$



funkcję ciągłą $f(x)$ reprezentuje zbiór $(n + 1)$ wartości: $f(a + ih), i = 0, 1, 2, n$

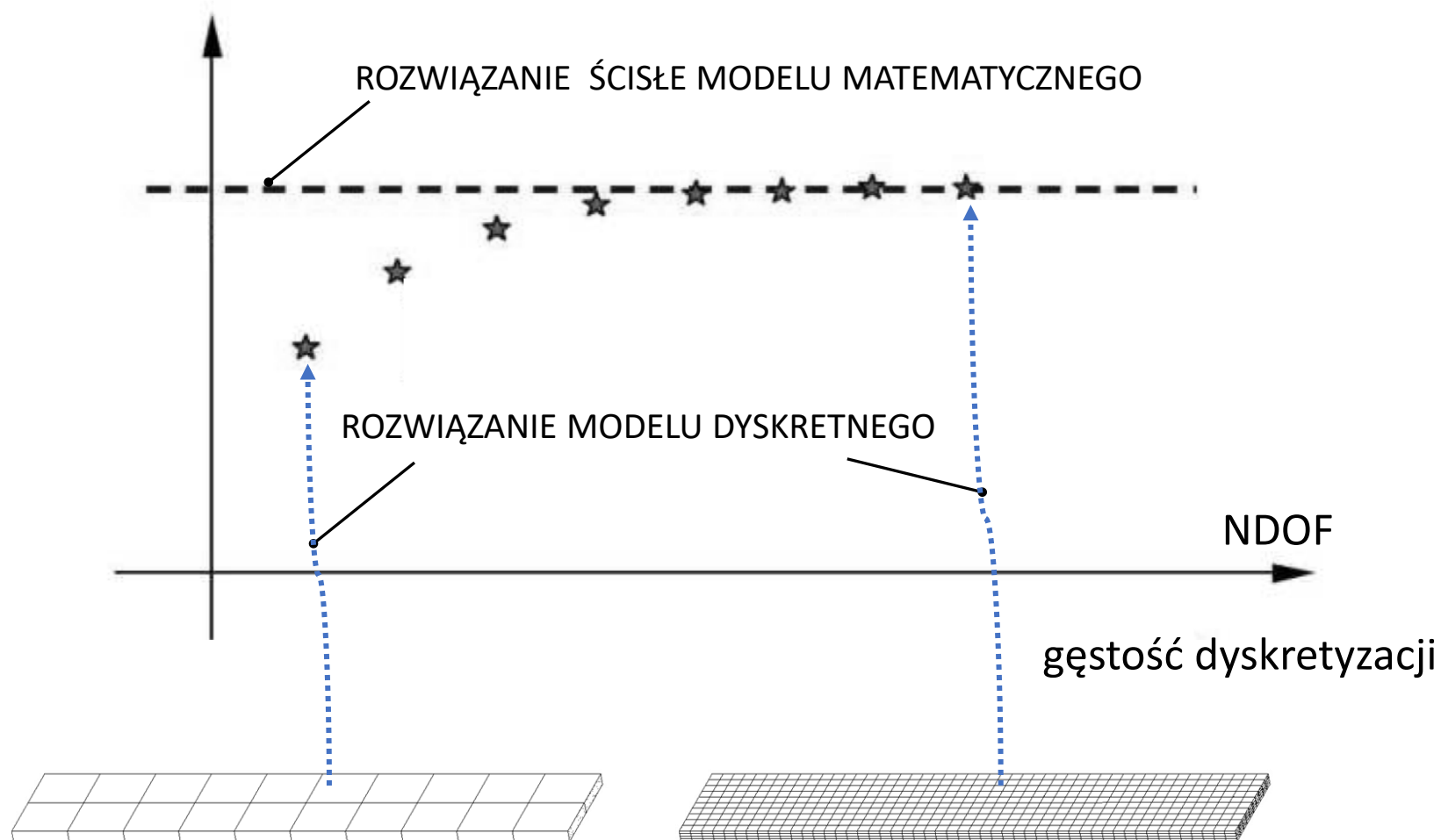


Aproksymacja może być:

- stała (schodkowa),
- liniowa (łamana),
- funkcjami sklejanymi.

Wpływ dyskretyzacji na jakość rozwiązania

Model dyskretny



Przedstawienie metod przybliżonych na przykładzie r-nia Poissona

Równanie Poissona opisuje wiele zjawisk o dużym znaczeniu w technice:

- *Stacjonarny przepływ ciepła,*
- *Stacjonarny bezwirowy przepływ nieściśliwej i nielepkiej cieczy,*
- *Proste pola magnetyczne i elektryczne,*
- *Rozkład naprężenia w przekroju pręta skręcanego (TS)*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0,$$

$$T(\bar{x}) = T_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u$$

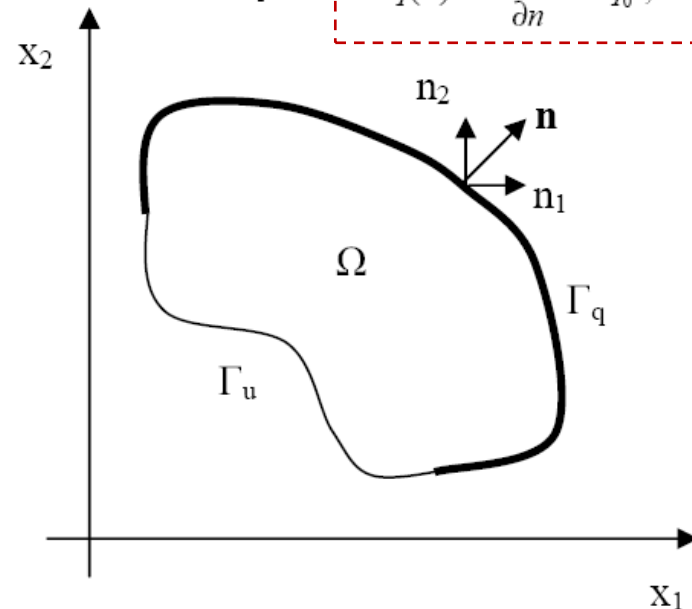
$$q(x) = \frac{\partial T(\bar{x})}{\partial n} = q_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_q$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0$$

Rozważmy warunki brzegowe:

$$u(\bar{x}) = u_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u \quad - \text{Dirichleta na } \Gamma_u$$

$$q(x) = \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n} = q_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_q \quad - \text{Neumanna na } \Gamma_q$$



Gdzie u_0 i q_0 są danymi funkcjami określonymi na odpowiednich częściach brzegu.

W szczególnych przypadkach (*prosta geometria i warunki brzegowe*) zadanie ma swoje analityczne rozwiązanie.

Metoda różnic skończonych (MRS)

MRS przybliża rozwiązanie równania różniczkowego za pomocą zastępowania operatorów różniczkowych **operatorami różnicowymi**:

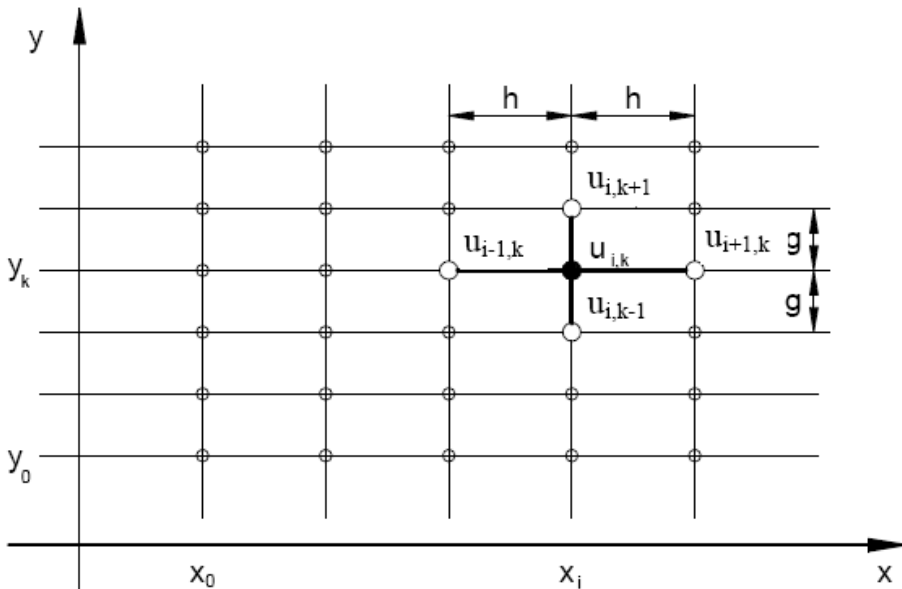
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \longrightarrow \quad f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dyskretyzacja polega na zastąpieniu poszukiwanej funkcji przez zbiór jej wartości w węzłach siatki (regularnej lub nieregularnej).

Wartości pochodnych w punkcie zastępowane są za pomocą przyrostów (różnic) funkcji w sąsiadujących węzłach.

Równania różniczkowe zastępowane są przez równania algebraiczne tzw. równania różnicowe

Otrzymujemy układ równań algebraicznych z niewiadomymi będącymi wartościami funkcji w węzłach.

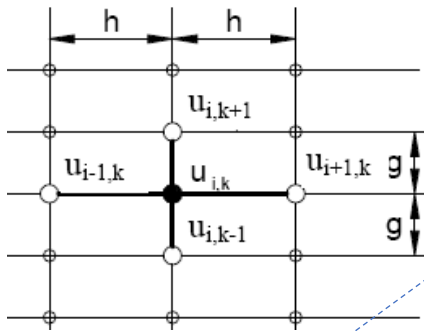


Dla siatki prostokątnej: $x_i = x_0 + ih,$ $u_{i,k} = u(x_i, y_k)$
 $y_k = y_0 + kg,$

Można przyjąć różne schematy różnicowe:

- a) $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{g},$ **Iloraz różnicowy przedni**
- b) $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{g},$ **Iloraz różnicowy tylny**
- c) $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2g},$ **Iloraz różnicowy centralny**

Metoda różnic skończonych (MRS)



Różnice odpowiadające wyższym pochodnym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \approx \frac{\Delta^4 u}{\Delta x^4} = \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2} = \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{g^2}.$$

Za pomocą schematu różnicowego możemy wyrazić równanie różniczkowe w dowolnym punkcie (x_i, y_j) za pomocą równania algebraicznego w przypadku równania Poissona:

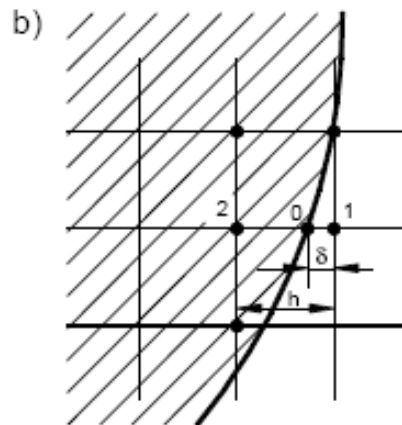
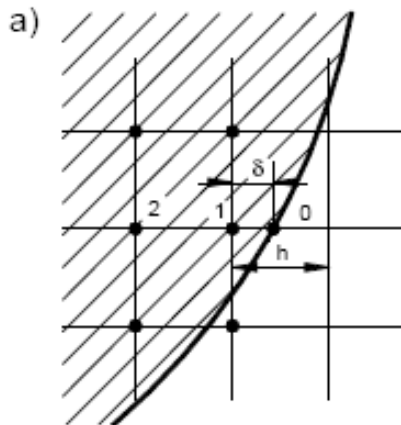
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{g^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + f(x_i, y_j) = 0.$$

Dla siatki regularnej ($h=g$) i $f=0$ (równanie Laplace'a) mamy:

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}.$$

N węzłów w obszarze Ω , N równań, N niewiadomych (każde równanie odpowiada jednemu węzłowi siatki)

$$[A] \{u\} = \{b\}$$



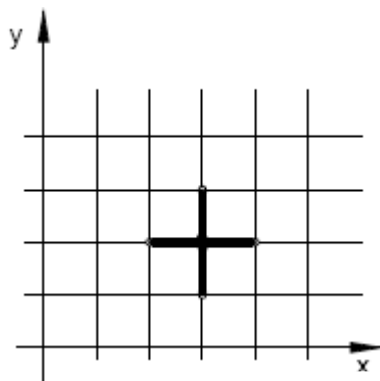
W przypadku nieregularnych kształtów brzegu:

- a) zakładamy $u_1 = \frac{hu_0 + \delta u_2}{h + \delta}$ zamiast $u = u_0$
- b) zakładamy $u_1 = \frac{hu_0 - \delta u_2}{h - \delta}$ zamiast $u = u_0$

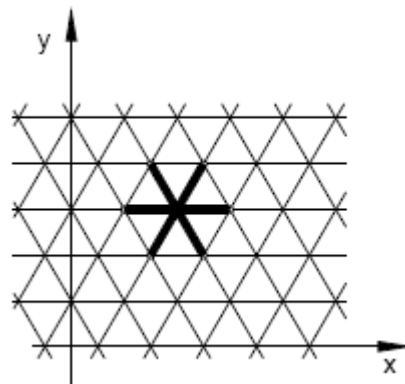
Interpolacja warunku brzegowego

ekstrapolacja warunku brzegowego

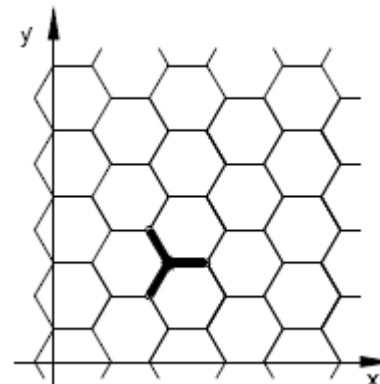
Przykłady siatek nieregularnych w MRS



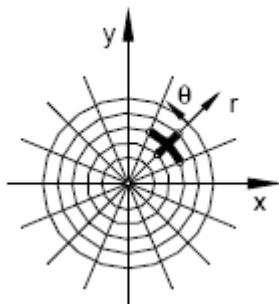
Siatka kwadratowa



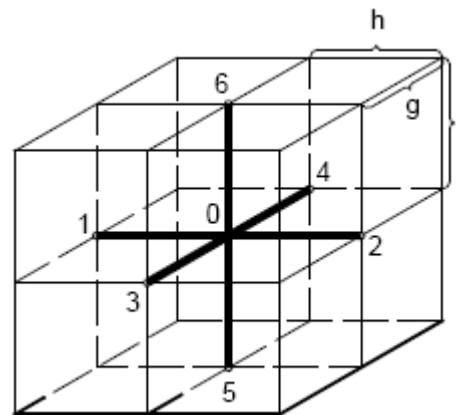
Siatka trójkątna



Siatka sześciokątna



Siatka w układzie biegunowym



Siatka prostopadłościenna

Metoda elementów brzegowych (MEB)

Dla punktu źródłowego można przedstawić brzegowe równanie całkowe, które stanowi sformułowanie równoważne dla zagadnienia Poissona:

$$c(\bar{\xi})u(\bar{\xi}) = \int_{\Gamma} u(x)q^*(\bar{\xi}, \bar{x})d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \bar{n}} u^*(\bar{\xi}, \bar{x})d\Gamma(\bar{x}) + \int_{\Omega} f(x)u^*(\bar{\xi}, \bar{x})dR(\bar{x})$$

Funkcje u^* i q^* zależą od położenia dwóch punktów: $\bar{\xi}$ - punkt źródłowy, \bar{x} - punkt obserwacyjny

$c(\bar{\xi})$ - Współczynnik równy $\frac{1}{2}$ na gładkim konturze lub 1 wewnątrz obszaru Ω

Rozwiązanie fundamentalne (znane w teorii r-ń całkowych):

$$u^* = (\bar{\xi}, \bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Funkcja q^* określona jest przez pochodną kierunkową u^* :

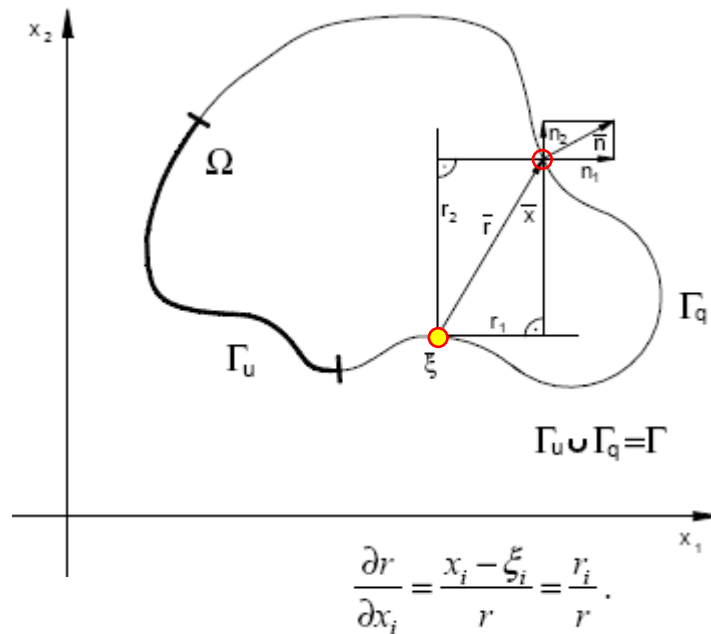
$$q^*(\bar{\xi}, \bar{x}) = \frac{\partial u^*(\bar{\xi}, \bar{x})}{\partial n}.$$

Dokonując różniczkowania, otrzymujemy:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial x_1} \cdot n_1 + \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \cdot n_2, \quad q^* = \frac{-(r_1 \cdot n_1 + r_2 \cdot n_2)}{2\pi r^2},$$

Gdzie: $r_i = x_i - \xi_i$, $i = 1, 2$, $\bar{n} = n_1, n_2$ jest jednostkowym wektorem zewnętrznym, normalnym do brzegu Γ

Brzegowe równanie całkowe wiąże ze sobą niezależną funkcję $u(\bar{x})$ i jej pochodną normalną $q(\bar{x}) = \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \bar{n}}$ na brzegu Γ .



Metoda elementów brzegowych (MEB)

1. Brzeg dzielimy na LE elementów

2. Na każdym elemencie brzegowym aproksymujemy funkcje $u(\bar{x})$ i $q(\bar{x})$

(np.: $u(P_i)$ i $q(P_i)$ stałe na elementach brzegowych)

3. Przekształcamy równanie całkowe dla każdego węzła $\bar{\xi}$ w algebraiczne równanie liniowe

$$\frac{1}{2}u(P_i) = \sum_{j=1}^{LE} \int_{\Gamma_j} u^*(P_i, \bar{x}) q(P_j) d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{LE} \int_{\Gamma_j} q^*(P_i, \bar{x}) u(P_j) d\Gamma_j + \int_{\Omega} f(\bar{x}) u^*(P_i, \bar{x}) dR$$

$i = 1, 2, \dots, LE$

po numerycznym scałkowaniu dla każdego punktu węzłowego

$$\frac{1}{2}u(P_i) = \sum_{j=1}^{LE} U_{ij}^* \cdot q(P_j) - \sum_{j=1}^{LE} Q_{ij}^* \cdot u(P_j) + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, LE. \quad f_i = \int_{\Omega} f(\bar{x}) u^*(P_i, \bar{x}) d\Omega(\bar{x})$$

LE liniowych równań z niewiadomymi: $u(P_i)$ (jeśli punkt $P_j \in \Gamma_q$) lub $q(P_i)$ (jeśli $P_i \in \Gamma_u$)

$$\frac{1}{2}\{u\} = [U^*]\{q\} - [Q^*]\{u\} + \{f\}.$$

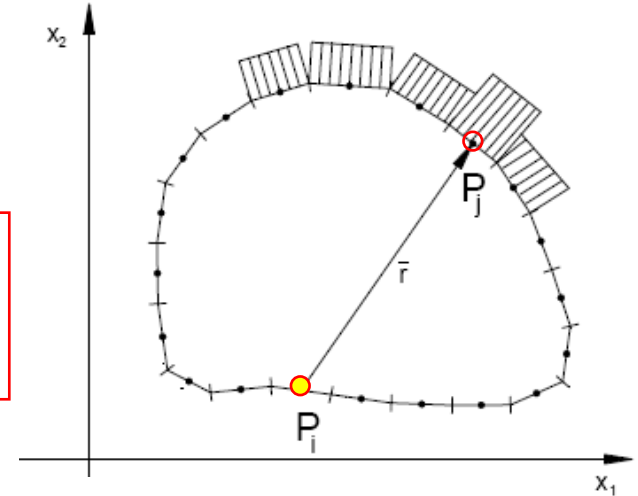
Ostatecznie:

$$[A]\{y\} = \{b\}$$

Rozwiązanie $\{y\}$ przedstawia poszukiwane wartości brzegowe u i q .

Macierz A – pełna i niesymetryczna

4. Rozwiązanie daje pełną informację o funkcji $u(\bar{x})$ i jej pochodnej $q(\bar{x})$ na brzegu



Metoda elementów skończonych (MES)

Równoważne (dla zadania Poissona) zadanie minimalizacji funkcjonału

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} q_0 u d\Gamma,$$

Gdzie funkcja u spełnia warunek Dirichleta:

$$u(\bar{x}) = u_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u$$

1. Dyskretyzacja obszaru rozwiązania Ω na elementy Ω_i , $i = 1, LE$ połączone w węzłach

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{LE} \Omega_e \quad \text{i} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = 0 \quad i \neq j,$$

2. Aproksymacja funkcji $u(\bar{x})$ w elemencie skończonym za pomocą funkcji kształtu i nieznanych parametrów węzłowych u_i

$$u(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{LWE} N_i(x_1, x_2) u_i$$

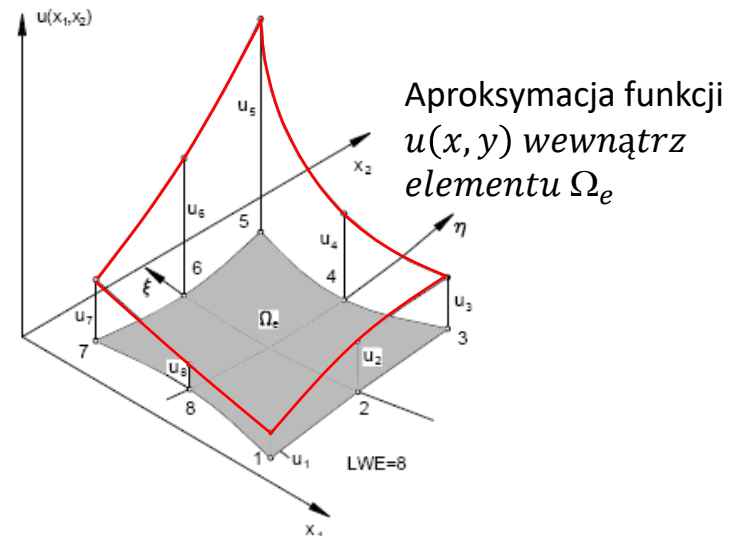
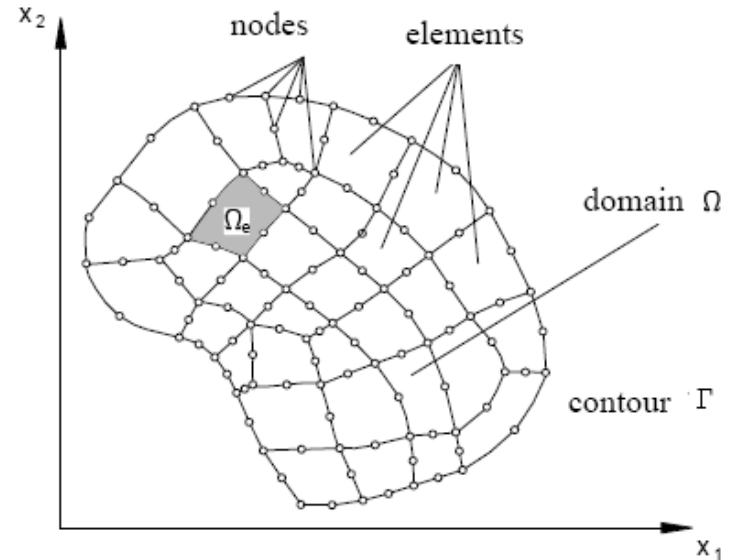
LWE – liczba węzłów w elemencie

u_i , $i=1, \dots, LWE$ – wartości węzłowe poszukiwanej funkcji

$N_i(x_1, x_2)$ – funkcje kształtu

3. Postać dyskretna funkcjonału

$$I(u) \cong \sum_{i=1}^{LE} \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)u \right] d\Omega_i - \sum_{j=1}^{LK} \int_{\Gamma_j} q_0 u d\Gamma_j$$



Metoda elementów skończonych (MES)

Wewnątrz każdego elementu mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{LWE} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{LWE} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_i.$$

W ten sposób zastępujemy funkcjonal I za pomocą funkcji wielu zmiennych u_i , $i=1,2,\dots,LW$, gdzie LW oznacza liczbę węzłów. W postaci macierzowej funkcja ta ma postać:

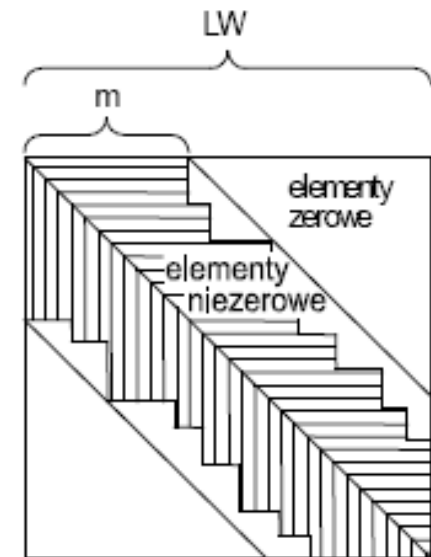
$$I(u) \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{LW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1LW} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & \\ k_{31} & k_{32} & & & \\ \dots & & & & \\ k_{LW1} & & & & k_{LWLW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_{LW} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{LW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_{LW} \end{Bmatrix}$$

$$I \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}_{1 \times LW} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}_{LW \times LW} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_{LW \times 1} - \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}_{1 \times LW} \begin{Bmatrix} b \end{Bmatrix}_{LW \times 1}.$$

Warunkiem koniecznym minimum tej funkcji jest zerowanie się wszystkich pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, LW.$$

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \end{Bmatrix}, \quad (+ \text{Dirichlet b.c.})$$

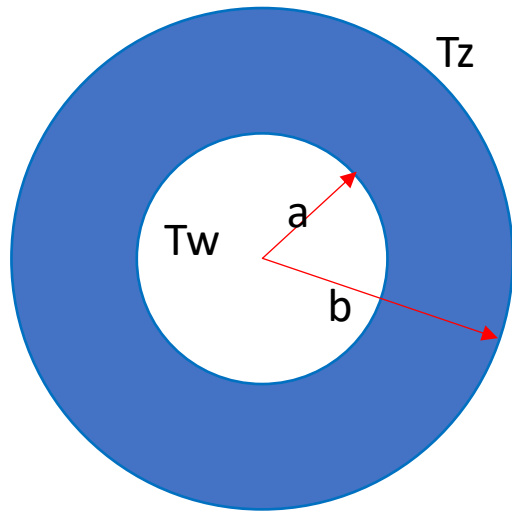


Układ równań algebraicznych liniowych z nieznanymi wartościami węzłowymi poszukiwanej funkcji

Przykład 4: Stacjonarny przepływ ciepła w rurze

Stalowa grubościenna rura ma temperaturę wewnętrzną $T_w=100^\circ\text{C}$ a temperaturę zewnętrzną $T_z=20^\circ\text{C}$. Promień wewnętrzny rury $a=30\text{mm}$, zewnętrzny $b=40\text{mm}$. Obliczyć rozkład temperatury.

Dane: $\lambda=50\text{W/mK}$.



Równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 T = 0$$



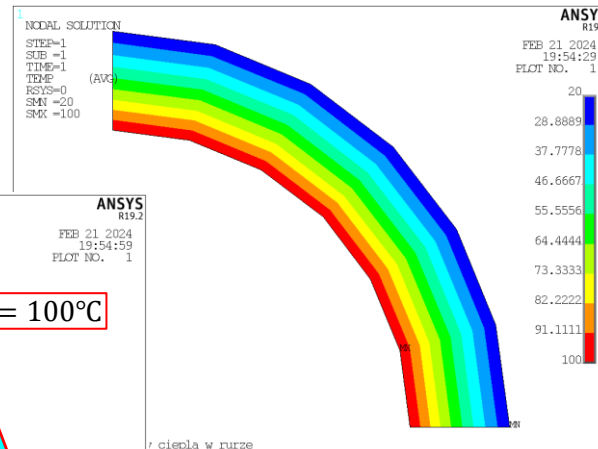
Rozwiązanie analityczne:

$$T(r) = T_w + \frac{T_z - T_w}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

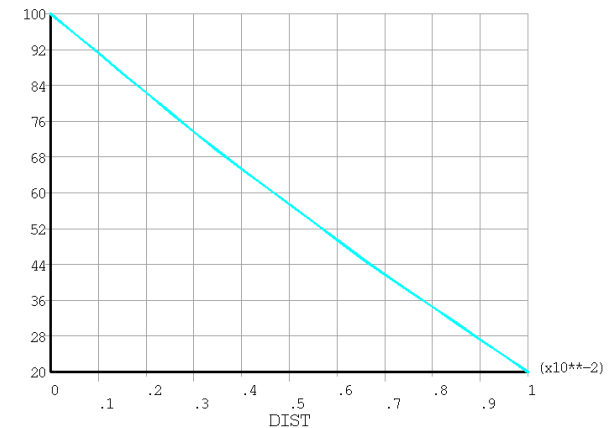
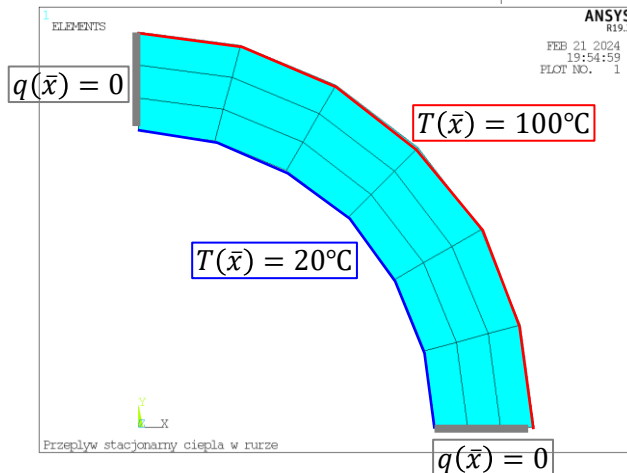
$$T(\bar{x}) = T_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u$$

$$q(x) = \frac{\partial T(\bar{x})}{\partial n} = q_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_q$$

Rozkład temperatury:



Model MES:



PL4

Ogólny schemat postępowania przy obliczeniach:

Metodą Różnic skończonych

Metodą elementów brzegowych

Metodą elementów skończonych

Równania różniczkowe cząstkowe

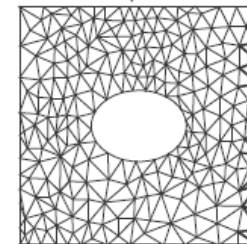
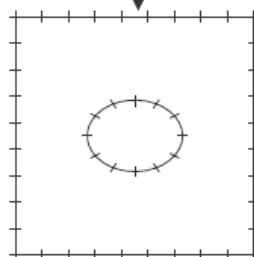
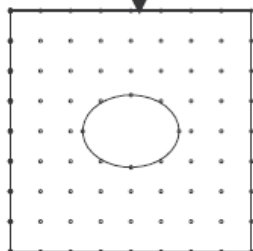
Całkowe równania brzegowe

Problem minimalizacji funkcjonału

Budowa siatki węzłów i przyjęcie
wybranych schematów
różnicowych

Podział brzegu na segmenty
(elementy brzegowe)
i założenie odpow. funkcji aproksym.
na elementach (funkcji kształtu)
W niektórych przypadkach pomocnicza
dyskretyzacja obszaru

Podział obszaru na małe podobszary
(elementy skończone)
i przyjęcie odpowiednich funkcji
aproksymujących na elementach
(funkcji kształtu)



Zastąpienie równań różniczkowych
przez równania różnicowe dla
kolejnych węzłów obszaru.
Formowanie układu równań liniowych

Budowa dyskretnej reprezentacji
równania całkowego
dla kolejnych węzłów brzegu.
Formowanie układu równań liniowych

Budowa macierzy sztywności
kolejnych elementów.
Formowanie układu równań liniowych

Modyfikacja układu równań –
wprowadzenie warunków brzegowych

Modyfikacja układu równań –
wprowadzenie warunków brzegowych

Modyfikacja układu równań –
wprowadzenie warunków brzegowych

Rozwiązanie układu równań liniowych
(macierz rzadka, pasmowa, zwykle
symetryczna)

Rozwiązanie układu równań liniowych
(macierz pełna, niesymetryczna)

Rozwiązanie układu równań liniowych
(macierz rzadka, pasmowa, zwykle
symetryczna)

Obliczenia uzupełniające, np.
pochodnych poszukiwanych funkcji w
węzłach

Obliczenia uzupełniające, np.
poszukiwanych funkcji i ich
pochodnych w wybr. punkt. obszaru

Obliczenia uzupełniające, np.
funkcji i jej pochodnych funkcji wewnątrz
elementów skończonych

MES jako metoda przybliżona

Metoda elementów skończonych (MES) jest metodą przybliżoną, którą można wykorzystać jako procedurę numeryczną do rozwiązywania problemów fizycznych, w tym:

- mechaniki ciała stałego,
- wymiany ciepła,
- przepływu cieczy,
- elektromagnetyzmu,
- zagadnienia pól sprzężonych
- ...

MES został opracowany w latach 50 XX wieku w celu rozwiązywania problemów dla przemysłu cywilnego i lotniczego. Metoda stała się najpotężniejszym narzędziem analitycznym, głównie dzięki rozwojowi komputerów.

Celem wykładu jest dostarczenie podstawowej wiedzy i umiejętności potrzebnych do zrozumienia i zastosowania MES do rozwiązywania problemów brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych

Elementy rachunku macierzowego

Przedstawione poniżej informacje stanowią krótkie przypomnienie elementów rachunku macierzowego niezbędne dla zrozumienia podstaw metody elementów skończonych.

Macierzą prostokątną $[a_{ik}]$ o wymiarach $m \times n$ nazywamy funkcję, która każdej uporządkowanej parze zmiennych naturalnych (i, k) , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą a_{ik} . Macierz zapisujemy w postaci tablicy prostokątnej mającej m wierszy i n kolumn:

$$[A]_{m \times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

W przypadku, gdy $m = n$ macierz nazywamy kwadratową.

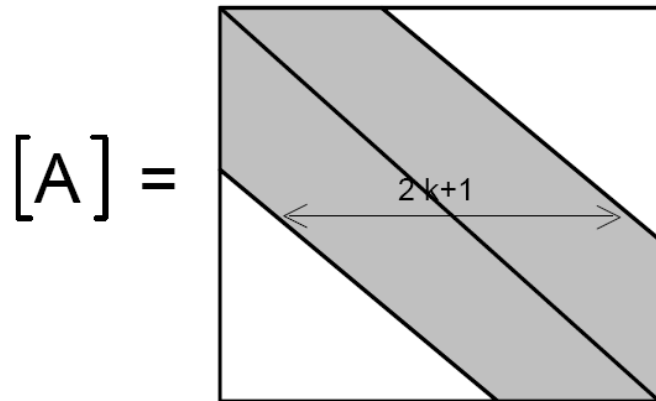
Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową, w której wszystkie elementy poza leżącymi na głównej przekątnej (diagonali) są równe zero ($a_{ij} = 0$, $i \neq j$).

Macierz $[A]_{m \times 1}$ nazywać będziemy wektorem-kolumną i oznaczać $\{A\} = \{a_i\}$ $i = 1, 2, \dots, m$.

Macierz $[A]_{1 \times n}$ nazywać będziemy wektorem-wierszem i oznaczać $[A] = [a_i]$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Elementy rachunku macierzowego

Macierzą pasmową nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie niezerowe elementy leżą na przekątnej głównej (diagonali) i w k równoległych do diagonali liniach z każdej strony ($a_{ij} = 0$ jeśli $|i - j| > k$). $(2k + 1)$ – szerokością pasma macierzy $[A]$



Macierzą jednostkową o wymiarze n nazywamy macierz diagonalną o jednostkowych elementach niezerowych

$$[I] = [\delta_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ik} = 1 \text{ gdy } i = k, \delta_{ik} = 0, \text{ gdy } i \neq k.$$

Macierzą transponowaną macierzy $[A] = [a_{ik}]$ nazywamy macierz $[A]^T = [a_{ki}]$ powstałą

przez przestawienie wierszy i kolumn. W szczególności mamy $[q]^T = \{q\}$ i $\{q\}^T = [q]$.

Macierzą symetryczną nazywamy macierz kwadratową, dla której $[A]^T = [A]$ ($a_{ik} = a_{ki}$).

Podstawowe działania na macierzach

Sumą macierzy $[A] = [a_{ik}]$ i $[B] = [b_{ik}]$ nazywamy macierz $[C] = [a_{ik} + b_{ik}]$.

Operacja dodawania macierzy wymaga zgodności wymiarów macierzy składowych.

Iloczynem macierzy $[A] = [a_{ik}]$ przez liczbę rzeczywistą λ nazywamy macierz $[B] = [\lambda a_{ik}]$

Iloczynem macierzy $[A] = [a_{ik}]$ przez macierz $[B] = [b_{ik}]$ nazywamy macierz $[C] = [c_{ik}]$

taką, że:

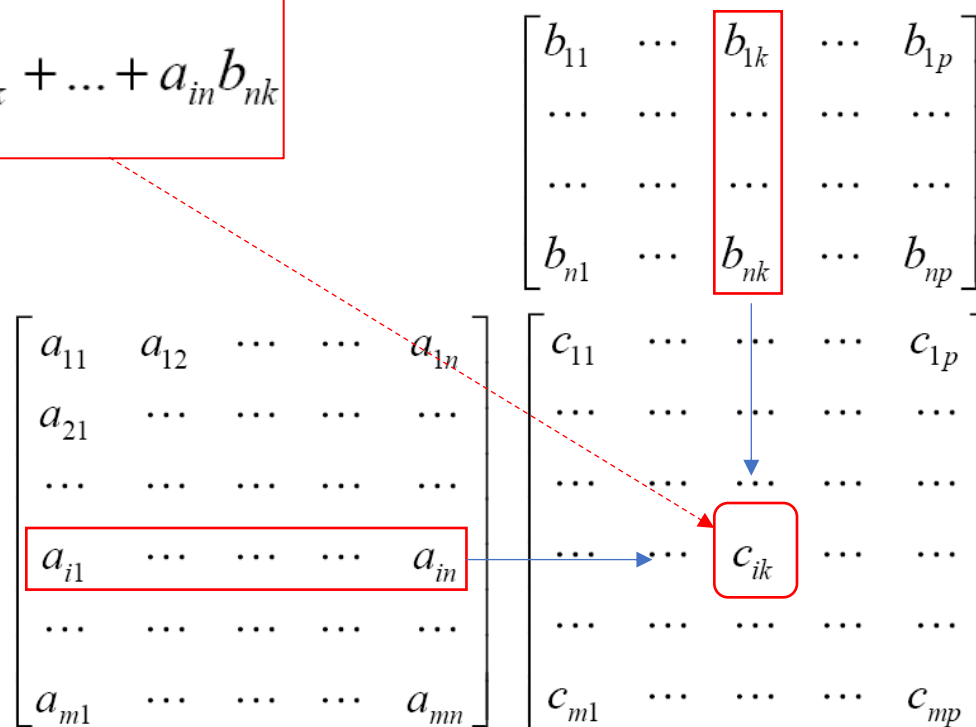
$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m, \\ k = 1, 2, \dots, p. \end{matrix} \quad (D.3)$$

Mnożenie macierzy jest możliwe jedynie w przypadku, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy.

Mnożenie macierzy nie jest przemienne ($[A][B] \neq [B][A]$).

Mnożenie macierzy schematem Falka

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$



Wybrane własności działań na macierzach

1. $[A] \cdot ([B] \cdot [C]) = ([A] \cdot [B]) \cdot [C]$
2. $\alpha[A] \cdot [B] = (\alpha[A]) \cdot [B] = [A] \cdot (\alpha[B])$
3. $([A] \cdot [B])^T = [B]^T [A]^T$

Elementy rachunku macierzowego

Rzędem macierzy A nazywamy największy wymiar podmacierzy kwadratowej powstałej przez wykreślenie części wierszy i kolumn, dla której wyznacznik jest różny od zera. Rzędem macierzy nieosobliwej o wymiarze n jest więc n . Rząd macierzy osobliwej jest mniejszy niż jego wymiar.

Wybrane własności wyznacznika:

1. Jeżeli jakiegokolwiek dwa wiersze (kolumny) są liniowo zależne (dają się przedstawić w postaci liniowej kombinacji pozostałych) to wartość wyznacznika jest równa zeru.
2. $\det[A] = \det[A]^T$.
3. Wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych.
4. $\det([A] \cdot [B]) = \det[A] \cdot \det[B]$.

Macierz odwrotna. Układ równań liniowych

Macierzą odwrotną nieosobliwej macierzy $[A]$ nazywamy macierz $[A]^{-1}$ taką, że

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} [A] = [I] = [\delta_{ik}].$$

Istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna macierzy nieosobliwej

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det A} [\alpha_{ik}]^T,$$

gdzie α_{ik} są dopełnieniami algebraicznymi elementów a_{ik} macierzy $[A]$.

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

zapisać można w postaci macierzowej

$$\begin{matrix} [A] & \{x\} & = & \{b\} \\ m \times n & n \times 1 & & m \times 1 \end{matrix}$$

Układ nazywamy sprzecznym, gdy nie posiada żadnego rozwiązania, oznaczonym - gdy posiada dokładnie jedno rozwiązanie, albo nieoznaczonym, gdy posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykłady

PRZYKŁAD 1

Niech $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Obliczmy $[A] \cdot [A]^T$.

Według schematu Falka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{bmatrix}$$

czyli $[C] = [A] \cdot [A]^T = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{bmatrix}$.

Przykłady

PRZYKŁAD 3

Niech $[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć $[A]^{-1}$.

Wyznaczamy najpierw wartość wyznacznika:

$$\det[A] = 2 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-1)^3 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-1)^4 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 2 - 1 = 1$$
$$\det[A] = 1.$$

Oznacza to, że istnieje macierz odwrotna. Macierz dopełnień algebraicznych jest w tym przypadku równa:

$$[\alpha_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Stąd } [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} [\alpha_{ik}]^T$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy:

$$[A] \cdot [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I].$$

Przykłady

sposób zapisu lokalnego wektora parametrów węzłowych

wektor – kolumna

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix}_e$$

wektor – wiersz

$$[q]_e = [u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n,]_e$$